

Colle du 08/10 - Sujet 1
Bijections et trigonométrie

Question de cours.

1. Énoncer le théorème de la bijection.
2. Démontrer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que f définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans un ensemble que l'on précisera.
3. Déterminer une expression de f^{-1} analogue à celle de f .
4. Calculer de deux façons différentes la dérivée de f^{-1} .

Exercice 2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a + b + c = \pi$. Montrer que

$$1 + 4 \sin\left(\frac{a}{2}\right) \sin\left(\frac{b}{2}\right) \sin\left(\frac{c}{2}\right) = \cos(a) + \cos(b) + \cos(c).$$

Colle du 08/10 - Sujet 2
Bijections et trigonométrie

Question de cours.

1. Donner les valeurs remarquables du cosinus et du sinus.
2. Montrer que la fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ à l'aide de limites usuelles.

Exercice 1. Déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ tels que $\sin\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) \cos\left(x + \frac{4\pi}{5}\right) = \sin\left(x + \frac{4\pi}{5}\right) \cos\left(3x - \frac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 2.

1. Montrer que la fonction tangente définit une bijection de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ dans un ensemble V que l'on déterminera. On note φ sa réciproque.
2. Déterminer le tableau de variation de φ et préciser $\varphi(0)$ et $\varphi(\sqrt{3})$.
3. Montrer que φ est dérivable sur V et déterminer sa dérivée.

Colle du 08/10 - Sujet 3
Bijections et trigonométrie

Question de cours.

1. Définir la négligeabilité entre deux fonctions.
2. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(x^2 - 1)$ définit une bijection de $]1; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et préciser sa fonction réciproque.

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}_+$ l'équation $x^7 + x^4 = 2268$.

Exercice 2. Soit

$$g :]-\pi; \pi[\rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{2 \cos(x) - 6 \sin(x) + 8}{1 + \cos(x)}.$$

Démontrer que g admet un minimum sur $] -\pi; \pi[$ et le déterminer.

On pourra passer par les formules de l'angle moitié.